数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 85-98

A NEW PROOF OF THE GLOBAL EXISTENCE THEOREM OF KLAINERMAN

北海道工業大学　横山 和義 (Kazuyoshi Yokoyama)
Hokkaido Institute of Technology

1 序.

未知関数 $u=(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ についての準線形波動方程式系の初期値問題

$$(\partial_t^2 - c_i^2\Delta)u^i(t,x) = F^i(\partial u, \partial^2 u), \quad t>0, x\in\mathbf{R}^n, i=1,\ldots,m, \tag{1}$$

$$u^i(0,x)=f^i(x),\ \partial_t u^i(0,x)=g^i(x), \quad x\in\mathbf{R}^n, i=1,\ldots,m \tag{2}$$

について考察する. 本稿では $n\geqq 3$ の場合を扱い, 初期値 f^i, g^i はコンパクトな台をもつ C^∞ 級関数, 非線形項は次のように $\partial u, \partial^2 u$ について 2 次斉次であるとする :

$$F^i(\partial u, \partial^2 u) = \sum_{j,k=1}^m \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^n G_{jk}^{i,\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha u^j \partial_\beta\partial_\gamma u^k + \sum_{j,k=1}^m \sum_{\alpha,\beta=0}^n H_{jk}^{i,\alpha\beta}\partial_\alpha u^j\partial_\beta u^k. \tag{3}$$

ここで $G_{jk}^{i,\alpha\beta\gamma}$, $H_{jk}^{i,\alpha\beta}$ は実定数であり, 対称性

$$G_{jk}^{i,\alpha\beta\gamma} = G_{jk}^{i,\alpha\gamma\beta} = G_{ji}^{k,\alpha\beta\gamma} \tag{4}$$

が仮定される. 非線形項を 2 次にするのはそれが最も本質的であるためであり, 今回の問題では高次の項があってもさしつかえない. 条件 (4) によりエネルギー評価が成り立ち, 初期値問題 (1)-(2) の C^∞ 級時間局所解の存在が分かる.

問題は時間局所解を大域的に延長できるかどうかである. 高次元の方が解の時間減衰が良いために有利であり, $n\geqq 4$ ならば「十分小さい」初期値に対して C^∞ 級時間大域解の存在を示すことが出来る ([2, 11]). $n=3$ では初期値が小さいことを仮定するだけでは不十分であることが知られており, 非線形項 $F^i(\partial u, \partial^2 u)$ に "null condition" と呼ばれる条件を仮定する. Klainerman [12] は $c_1=\cdots=c_m=1$ の場合にベクトル場

$$\Omega_{ij} = x^i\partial_j - x^j\partial_i, \quad S = t\partial_t + \sum_{i=1}^n x^i\partial_i, \quad L_i = t\partial_i + x^i\partial_t \tag{5}$$

を用いて null condition を満たす方程式に対して時間大域解の存在を示した. ベクトル場 (5) を使って非線形項 $F^i(\partial u, \partial^2 u)$ を書き換えると, null condition を満たすときにうまく減衰因子が取り出せることが議論の本質である. 別の証明法としては Christodoulou [1]

があるが, その後の Klainerman の結果の一般化は主としてこのベクトル場を用いる方法によっていると思われる. Yokoyama [19] からはベクトル場 (5) のうち Ω_{ij} と S だけを使って時間大域解の存在が示されるようになった. ベクトル場 L_i は方程式 (1) に伝播速度が複数ある場合には使いにくいという欠点があり, 一般化の妨げになっていたのである. [19] の結果に対しては [3, 17, 18] で単純化された証明が示され, [6, 7, 8] では非線形項を $F^i(u,\, \partial u,\, \partial^2 u)$ に一般化した定理が得られている.

このように初期値問題に関しては様々の存在定理があるのだが, ベクトル場 (5) を利用する方法を初期値境界値問題へ一般化するのはそう容易ではない. 問題はベクトル場 S を含む量を評価する時におこる. このことを見るために, 滑らかな境界をもつ有界領域 $\mathcal{K}$ の外部領域における Dirichlet 問題 (単独方程式)

$$\Box u(t,\, x) = F(\partial u), \quad t>0,\ x\in \mathbf{R}^n\setminus\mathcal{K}, \tag{6}$$

$$u(t,\, x) = 0, \quad t>0,\ x\in \partial\mathcal{K} \tag{7}$$

の解の評価を考えよう. ベクトル場 S を使うためには $S^a u\ (a=1,2,\ldots)$ のような量を評価しなければならないが, $\partial_t S^a u\cdot \Box S^a u$ を $\mathbf{R}^n\setminus\mathcal{K}$ 上で積分することにより得られるエネルギー恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\|\partial S^a u(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n\setminus\mathcal{K})} + 2\int_{\partial\mathcal{K}} \partial_t S^a u\cdot\partial_{\vec{n}} S^a u\,\mathrm{d}\sigma = 2\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathcal{K}} \partial_t S^a u\cdot \Box S^a u\,\mathrm{d}x$$

の左辺第 2 項は単なる初期値問題では現れない項であり, 評価するには工夫が必要である. Keel-Smith-Sogge [10] では $a=1$ の場合に

$$\int_{\partial\mathcal{K}} \partial_t S u\cdot \partial_{\vec{n}} S u\,\mathrm{d}\sigma = t\int_{\partial\mathcal{K}} (x,\, \vec{n})(\partial_{\vec{n}}\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\mathcal{K}} (x,\, \vec{n})\partial_{\vec{n}}\partial_t u\cdot\partial_{\vec{n}}(x,\, \nabla u)\,\mathrm{d}\sigma$$

と変形した. ($\vec{n}$ は $\partial\mathcal{K}$ 上の単位外法線ベクトル場.) 境界上で $(x,\, \vec{n})\geqq 0$ が成り立つような障害物であれば, こうして t について増大する可能性のある項を非負性により処理することが出来るわけである. このような技巧を $a\geqq 2$ の場合に行うのは困難であると思われ, [10] では $S^a u\ (a\geqq 2)$ が現れないように注意しながら外部問題に対する “almost global existence” の結果を得ている.

ちょうど複数の伝播速度をもつ問題を考えるときにベクトル場 L_i が使えなくなったように, 初期値境界値問題においてはベクトル場 S の使用が制限される可能性もあると思われる. そこで我々は, 初期値問題 (1)-(2) に対し「ベクトル場 S を 2 回以上掛けた量を使わない」という [10] の立場で時間大域解の存在を示すことが出来るかどうかについて考察することにした. $n=3$ の場合が難しく, 本稿では

$$F^i(\partial u,\, \partial^2 u) = \sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} C^{i,\alpha\beta\gamma}_{jk} Q_{\alpha\beta}(u^j,\, \partial_\gamma u^k) + \sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} C^{i,\alpha\beta}_{jk} Q_{\alpha\beta}(u^j,\, u^k), \tag{8}$$

ただし $Q_{\alpha\beta}(u,\, v) = \partial_\alpha u\partial_\beta v - \partial_\beta u\partial_\alpha v,$ (9)

と表される非線形項に限定している. $n=3$ の場合には null condition が必要であるとは言うものの, 残念ながら S の使用を制限しない従来の方法から得られる結果 ([3, 19]) に比べると制限が強い.

結果を詳しく述べるため, ここでいくつか記号を導入しよう. ∂_α $(\alpha=0,1,\dots,n)$ と (5) の Ω_{ij} $(1\leqq i<j\leqq n)$ を適当な順序に並べたものを $Z_1,\,Z_2,\,\dots,\,Z_{(n^2+n+2)/2}$ とする. さらに $u=(u^1,\,u^2,\,\dots,\,u^m)$ に対し,

$$E_1(u(t))=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbf{R}^n}(|\partial_t u^k(t,\,x)|^2+c_k^2|\nabla u^k(t,\,x)|^2)\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$E_\kappa(u(t))=\sum_{\substack{a+|b|\leqq\kappa-1\\ a\leqq 1}}E_1(S^aZ^bu(t)) \tag{11}$$

とおく. S を高々1回だけしか掛けていないことに注意する.

定理 1 非線形項 $F^i(\partial u,\,\partial^2 u)$ は (3), (4) を満たすとする. さらに $n=3$ のときは (8) の形に表されるとする. $l\in\mathbf{Z}$ に対して $\mu=l-[n/2]-2$ と置く. このとき $[l/2]+[n/2]+2\leqq\mu$ なる十分大きい l に対し $E_l^{1/2}(u(0))<\varepsilon$ ならば (1)-(2) の滑らかな時間大域解が一意的に存在する. その解は次を満たす:

$$E_\mu^{1/2}(u(t))<2\varepsilon,\quad E_l^{1/2}(u(t))\leqq 2E_l^{1/2}(u(0))(1+t)^{C\varepsilon}. \tag{12}$$

なお, この結果は三重大学の肥田野久二男氏との共同研究による ([4, 5]).

証明は $F^i(\partial u,\,\partial^2 u)=F^i(\partial u)$ の場合, つまり半線形の場合について説明する. 半線形の場合に限定しても議論の本質は損なわれない. 次節で記号および用いられる評価が説明され, 3節以降から定理の証明に入る.

2 準備.

ここで本稿を通じて使用される記号をまとめておく. $x=(x^1,\,x^2,\dots,x^n)\in\mathbf{R}^n$ は空間変数, $t\geqq 0$ は時間変数である. t は x^0 とも書く. 偏微分作用素 $\partial/\partial x^\alpha=:\partial_\alpha$ をまとめて $\partial=(\partial_0,\,\partial_1,\dots,\partial_n)$, $\nabla=(\partial_1,\dots,\partial_n)$ と置く. ∂_0 は ∂_t とも書く. さらに, 既に1節 (5) でも出てきたように

$$\Omega_{ij}=x^i\partial_j-x^j\partial_i\ \ (1\leqq i<j\leqq n),\quad S=\sum_{\alpha=0}^{n}x^\alpha\partial_\alpha \tag{13}$$

とし, $\Omega=(\Omega_{12},\dots,\Omega_{1n},\Omega_{23},\dots,\Omega_{n-1\,n})$, $Z=(\partial,\,\Omega)$ と置く. Z には $\nu=(n^2+n+2)/2$ 個の微分作用素が並んでいる. このように微分作用素を並べたベクトル作用素 ∂, ∇, Ω または Z に対して多重指標による積の記法を使う. 例えば $Z=(Z_1,\dots,Z_\nu)$ に対しては

$$Z^a=Z_1^{a_1}\cdots Z_\nu^{a_\nu},\quad a=(a_1,\dots,a_\nu)$$

である. $|a|=a_1+\cdots+a_\nu$ などは通常通りである. ただし一般には $Z_iZ_j \neq Z_jZ_i$ なので, ∂ と異なり必ずしも $Z^aZ^b=Z^{a+b}$ とはならない. 作用素 A, B の交換子を $[A,\, B]=AB-BA$ とすると,

$$[\partial_\alpha,\, Z_i]=\sum_{j=1}^{n} C_{\alpha i}^{j}\partial_j, \quad [S,\, Z_i]=\sum_{\alpha=0}^{n} C_i^{\alpha}\partial_\alpha, \tag{14}$$

$$[Z_i,\, Z_j]=\sum_{k=1}^{n} D_{ij}^{k} Z_k \tag{15}$$

となる ($C_{\alpha i}^j$, C_i^α, D_{ij}^k は実定数). 以下 ∂_α や Z_i の順番を交換して整理するときには断りなく (14), (15) を用いる. この他に D'Alembertian

$$\Box_i := \partial_t^2 - c_i^2\Delta, \quad (i=1,\ldots,m) \tag{16}$$

との交換子

$$[Z_i, \Box_j]=0, \quad [S, \Box_i]=-2\Box_i \tag{17}$$

がよく使われる. これより (1) の解 $u=(u^1,\ldots,u^m)$ に対して,

$$\Box_i S^a Z^b u^i = \sum_{c\leqq a}\sum_{|d|\leqq|b|} C_{cd}^{abi} S^c Z^d F^i(\partial u,\, \partial^2 u) \quad (i=1,\ldots,m) \tag{18}$$

が成り立つ (C_{cd}^{abi} は実定数).

既に1節の定理中にも出てきたように, 本研究ではエネルギーノルムの評価が中心課題となる. すなわち $u=(u^1,\, u^2,\, \ldots,\, u^m)$ に対し,

$$E_1(u(t))=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbf{R}^n}(|\partial_t u^k(t,\, x)|^2 + c_k^2|\nabla u^k(t,\, x)|^2)\,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

$$E_\kappa(u(t))=\sum_{\substack{a+|b|\leqq\kappa-1\\ a\leqq 1}} E_1(S^aZ^bu(t)) \tag{20}$$

により定められる量である. さらに補助的なノルムとして

$$\bar{E}_\kappa(u(t))=\sum_{|a|\leqq\kappa-1} E_1(Z^a u(t)), \tag{21}$$

$$\mathcal{E}_\kappa(u(t))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{a+|b|\leqq\kappa-1\\ a\leqq 1}} \|\langle r\rangle^{-1/2}\partial S^aZ^bu^i(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \tag{22}$$

$$M_\kappa(u(t))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{|a|=2}\sum_{|b|\leqq\kappa-2} \|\langle c_it-r\rangle\partial^aZ^bu^i(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \tag{23}$$

を用いる. ここで $r=|x|$, $\langle\rho\rangle=\sqrt{1+\rho^2}$ である. このとき次の評価が成り立つ.

補題 1 $n \geqq 3,\ \kappa \geqq 2$ とする.

$u = (u^1, \ldots, u^m)$ に対し $E_\kappa(u(t)) < \infty,\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{|a| \leqq \kappa-2} \|(t+r)\Box_i Z^a u^i(t)\|_{L^2} < \infty$ ならば

$$M_\kappa(u(t)) \leqq C E_\kappa^{1/2}(u(t)) + C \sum_{i=1}^{m} \sum_{|a| \leqq \kappa-2} \|(t+r)\Box_i Z^a u^i(t)\|_{L^2}. \tag{24}$$

証明. 例えば Klainerman-Sideris [13] の Lemma 3.1 を見よ. □

$M_\kappa(u(t))$ を評価するにはこの補題を用いる. $M_\kappa(u(t))$ が使えるようになると次のように減衰因子 $\langle c_i t - r \rangle$ がついた Sobolev 型一様評価が得られるという利点がある.

補題 2 $n \geqq 3$ とする. $u = (u^1, \ldots, u^m)$ に対し, $\bar{E}_{[n/2]+2}^{1/2}(u(t)) < \infty,\ M_{[n/2]+2}(u(t)) < \infty$ であるとすると,

$$\langle r \rangle^{n/2-1} \langle c_i t - r \rangle |\partial u^i(t,\, x)| \leqq C \bar{E}_{[n/2]+1}^{1/2}(u(t)) + C M_{[n/2]+2}(u(t)), \tag{25}$$

$$\langle r \rangle^{(n-1)/2} |\partial u(t,\, x)| \leqq C \bar{E}_{[n/2]+2}^{1/2}(u(t)), \tag{26}$$

$$\langle r \rangle^{n/2-1} |u(t,\, x)| \leqq C \bar{E}_{[n/2]+1}(u(t)). \tag{27}$$

証明. (25), (27) の証明は Hidano [2] Lemma 4.1 を見よ. (26) は Metcalfe [15] Lemma 2.10 の評価

$$\|h\|_{L^\infty(R/2 \leqq |x| \leqq 2R)} \leqq C R^{-(n-1)/2} \sum_{|a| \leqq [n/2]+1} \|Z^a h\|_{L^2(R/4 \leqq |x| \leqq 2R)}$$

によりただちに得られる. □

最後に [10, 15] で用いられている時空 L^2-評価を紹介する.

補題 3 $n \geqq 3,\ \kappa \geqq 1$ とする. $E_\kappa(u(0)) < \infty$ かつ $\|\Box_i S^a Z^b u^i\|_{L^1((0,T);L^2(\mathbf{R}^n))} < \infty$ $(a + |b| \leqq \kappa - 1,\ a \leqq 1)$ ならば

$$\sup_{0<t<T} E_\kappa^{1/2}(u(t)) \leqq E_\kappa^{1/2}(u(0)) + C \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{a+|b| \leqq \kappa-1 \\ a \leqq 1}} \|\Box_i S^a Z^b u^i\|_{L^1((0,T);L^2(\mathbf{R}^n))}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\{\log(2+t)\}^{-1/2} \left(\int_0^t \mathcal{E}_\kappa(u(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right)^{1/2} \\ &\leqq C E_\kappa^{1/2}(u(0)) + C \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{a+|b| \leqq \kappa-1 \\ a \leqq 1}} \|\Box_i S^a Z^b u^i\|_{L^1((0,t);L^2(\mathbf{R}^n))} \end{aligned} \tag{29}$$

が成り立つ.

証明. (28) はエネルギー評価である. (29) の $n=3$ の場合は Keel-Smith-Sogge [9] Proposition 2.1, $n \geqq 4$ は Metcalfe [15] Proposition 2.8 を見よ. [15] では $\langle r\rangle^{-1/2}$ の代りに $\langle r\rangle^{-(n-1)/4}$ としているが, 同様の議論によって (29) の評価を得るのは容易である. □

3 重み付き L^2-評価.

1 節の終わりにも書いたように, 定理の証明は半線形の場合に限定して行う. 以下では (3) で $G_{jk}^{i,\alpha\beta\gamma}=0$ とした方程式

$$(\partial_t^2 - c_i^2\Delta)u^i(t,x) = F^i(\partial u), \quad t>0,\, x\in\mathbf{R}^n,\, i=1,\dots,m, \tag{30}$$

$$u^i(0,x)=f^i(x),\ \partial_t u^i(0,x)=g^i(x), \quad x\in\mathbf{R}^n,\, i=1,\dots,m \tag{31}$$

について考えることにする. f^i, $g^i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ であるから, ある $T>0$ に対し $0\leqq t<T$ における (30)-(31) の解 $u\in C^\infty([0,T)\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^m)$ が存在する. さらに, $u(t,\cdot)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^m)$ である.

補題 4 u を $0\leqq t<T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. 正の整数 κ に対し $\kappa'=[(\kappa-1)/2]+[n/2]+2$ と置く. このとき, $|a|\leqq\kappa-2$ ならば

$$\|(t+r)\Box_i Z^a u^i(t)\|_{L^2} \leqq CE_{\kappa'}^{1/2}(u(t))E_\kappa^{1/2}(u(t)) + CM_{\kappa'}(u(t))E_\kappa^{1/2}(u(t)) \tag{32}$$

証明. (18) より $|\Box_i Z^a u^i| \leqq C\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{b,c}|\partial Z^b u^j||\partial Z^c u^k|$ である. ここで b,c についての和は $|b|+|c|\leqq\kappa-2$, $|b|\leqq|c|$ にわたってとる. $|b|+|c|\leqq\kappa-2$, $|b|\leqq|c|$ のとき $|b|\leqq[(\kappa-2)/2]$ であるから (25), (26) により

$$\begin{aligned}
&\|(t+r)\partial Z^b u^j(t)\partial Z^c u^k(t)\|_{L^2}\\
&\leqq C\|(\langle c_j t - r\rangle + \langle r\rangle)\partial Z^b u^j(t)\partial Z^c u^k(t)\|_{L^2}\\
&\leqq C\|(\langle c_j t - r\rangle + \langle r\rangle)\partial Z^b u^j\|_{L^\infty}\|\partial Z^c u^k\|_{L^2}\\
&\leqq C\{E_{|b|+[n/2]+2}^{1/2}(u(t)) + M_{|b|+[n/2]+2}(u(t))\}E_{|c|+1}^{1/2}(u(t))\\
&\leqq C\{E_{\kappa'}^{1/2}(u(t)) + M_{\kappa'}(u(t))\}E_{\kappa-1}^{1/2}(u(t)).
\end{aligned}$$

よって (32) が得られた. □

補題 5 u を $0\leqq t<T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. 正の整数 l に対し, $\mu=l-[n/2]-2$ と置く. l が十分大きく $[l/2]+[n/2]+2\leqq\mu$ であるとき, 十分小さい $\varepsilon>0$ に対して

$$\sup_{0<t<T} E_\mu^{1/2}(u(t)) \leqq 2\varepsilon \tag{33}$$

であるならば,

$$M_\mu(u(t)) \leqq CE_\mu^{1/2}(u(t)),\ 0<t<T, \tag{34}$$

$$M_l(u(t)) \leqq CE_l^{1/2}(u(t)),\ 0<t<T. \tag{35}$$

証明. まず補題1および補題4により $0<t<T$ において

$$\begin{aligned} M_\mu(u(t)) &\leqq CE_\mu^{1/2}(u(t)) + CE_{\mu'}^{1/2}(u(t))E_\mu^{1/2}(u(t)) + CM_{\mu'}(u(t))E_\mu^{1/2}(u(t)) \\ &\leqq CE_\mu^{1/2}(u(t)) + C\varepsilon M_\mu(u(t)) \end{aligned}$$

であるから (34) が成り立つ. ここで $\mu' \leqq \mu$ を用いた. 再び補題1および補題4を用い, $l' \leqq \mu$ であることに注意して (33), (34) を用いると

$$\begin{aligned} M_l(u(t)) &\leqq CE_l^{1/2}(u(t)) + CE_{l'}^{1/2}(u(t))E_l^{1/2}(u(t)) + CM_{l'}(u(t))E_l^{1/2}(u(t)) \\ &\leqq CE_l^{1/2}(u(t)) + C\varepsilon E_l(u(t)) \end{aligned}$$

であるから (35) も OK. □

以下の一連の評価において l 階導関数が最高階であるので, $E_l(u(t))$ を高階エネルギーと呼ぶ. これに対し, $E_\mu(u(t))$ を低階エネルギーと呼ぶことにする. 今示した補題5と補題2を合わせて次の評価を得る.

系 1 u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. 正の整数 l に対し, $\mu = l - [n/2] - 2$ と置く. l が十分大きく $[l/2] + [n/2] + 2 \leqq \mu$ であるとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{0<t<T} E_\mu^{1/2}(u(t)) \leqq 2\varepsilon \tag{36}$$

であるならば,

$$\langle r\rangle^{n/2-1}\langle c_i t - r\rangle \sum_{|a|\leqq[l/2]} |\partial Z^a u^i(t,x)| \leqq CE_\mu^{1/2}(u(t)), \tag{37}$$

$$\langle r\rangle^{(n-1)/2} \sum_{\substack{a+|b|\leqq[l/2] \\ a\leqq 1}} |\partial S^a Z^b u(t,x)| \leqq CE_\mu^{1/2}(u(t)), \tag{38}$$

$$\langle r\rangle^{n/2-1} \sum_{\substack{a+|b|\leqq[l/2]+1 \\ a\leqq 1}} |S^a Z^b u(t,x)| \leqq CE_\mu^{1/2}(u(t)). \tag{39}$$

系 2 系1と全く同じ仮定の下で,

$$\langle r\rangle^{n/2-1}\langle c_i t - r\rangle \sum_{|a|\leqq\mu} |\partial Z^a u^i(t,x)| \leqq CE_l^{1/2}(u(t)), \tag{40}$$

$$\langle r\rangle^{(n-1)/2} \sum_{\substack{a+|b|\leqq\mu \\ a\leqq 1}} |\partial S^a Z^b u(t,x)| \leqq CE_l^{1/2}(u(t)), \tag{41}$$

$$\langle r\rangle^{n/2-1} \sum_{\substack{a+|b|\leqq\mu+1 \\ a\leqq 1}} |S^a Z^b u(t,x)| \leqq CE_l^{1/2}(u(t)). \tag{42}$$

4 高階エネルギーと時空 L^2-ノルムの評価.

u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. 本節の目標はこの時間局所解に関する高階エネルギーの評価である. さらに, 後で必要になる時空 L^2-ノルムの評価も同時に行う. 正の整数 l に対し

$$\mu = l - [n/2] - 2, \quad [l/2] + [n/2] + 2 \leqq \mu \tag{43}$$

とし, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{0<t<T} E_\mu^{1/2}(u(t)) \leqq 2\varepsilon \tag{44}$$

であるとする.

補題 6 u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. l, μ は正の整数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとし, (43), (44) が成り立つと仮定する. $\kappa = \mu$ または $\kappa = l$ とするとき, $a + |b| \leqq \kappa - 1$, $a \leqq 1$ に対して

$$\| \Box_i S^a Z^b u^i(t) \|_{L^2} \leqq C\langle t\rangle^{-1} E_\mu^{1/2}(u(t)) E_\kappa^{1/2}(u(t)), \;\; 0 < t < T. \tag{45}$$

証明. (18) により,

$$\| \Box_i S^a Z^b u^i(t) \|_{L^2} \leqq C \sum_{j,k=1}^{m} \sum_{c,d,e,f} \| \partial S^c Z^d u^j(t) \partial S^e Z^f u^k(t) \|_{L^2} \tag{46}$$

である. ここで c, d, e, f についての和は $c+|d|+e+|f| \leqq \kappa-1$, $c+e \leqq 1$, $c+|d| \leqq e+|f|$ にわたってとる. まず右辺の和のうちで $c = 0$ の場合は $|d| \leqq [(\kappa-1)/2]$ であって, (37), (38) により

$$\begin{aligned}
&\| \partial Z^d u^j(t) \partial S^e Z^f u^k(t) \|_{L^2} \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} \| (\langle r\rangle + \langle c_j t - r\rangle) \partial Z^d u^j(t) \partial S^e Z^f u^k(t) \|_{L^2} \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} \| (\langle r\rangle + \langle c_j t - r\rangle) \partial Z^d u^j(t) \|_{L^\infty} \| \partial S^e Z^f u^k(t) \|_{L^2} \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} E_\mu^{1/2}(u(t)) E_\kappa^{1/2}(u(t)).
\end{aligned} \tag{47}$$

$c = 1$ の場合は $1+|d| \leqq [(\kappa-1)/2]$, $|f| \leqq \kappa-2$ である. ここでも微分階数の低い $\partial S^c Z^d u^j$ の方に L^∞-評価を使うのだが,

$$\begin{aligned}
&\| \partial S Z^d u^j(t) \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} \| (\langle r\rangle + \langle c_k t - r\rangle) \partial S Z^d u^j(t) \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} \left(\| \langle r\rangle \partial S Z^d u^j(t) \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} + \| \langle r\rangle \partial S Z^d u^j(t) \frac{1}{r} \langle c_k t - r\rangle \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} \right) \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} \| \langle r\rangle \partial S Z^d u^j(t) \|_{L^\infty} \left(\| \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} + \| \frac{1}{r} \langle c_k t - r\rangle \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} \right) \\
&\leqq \; C\langle t\rangle^{-1} E_\mu^{1/2}(u(t)) \left(E_\kappa^{1/2}(u(t)) + \| \frac{1}{r} \langle c_k t - r\rangle \partial Z^f u^k(t) \|_{L^2} \right)
\end{aligned} \tag{48}$$

のようにやる．ここでは $\langle c_k t - r\rangle$ が掛かった項を (37) を使って評価出来ないことに注意する．S の 2 乗が現れてしまうからである．最後に (48) において Hardy の不等式を用いると

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{r}\langle c_k t - r\rangle \partial Z^f u^k(t)\|_{L^2} &\leqq C\,\|\nabla\left(\langle c_k t - r\rangle \partial Z^f u^k(t)\right)\|_{L^2}\\ &\leqq CE_\kappa^{1/2}(u(t)) + CM_\kappa(u(t)) \end{aligned}\tag{49}$$

であるから (46)-(49) と補題 5 により (45) を得る．　□

次の命題が高階エネルギーの評価である．これより定理 1(12) のうちの第 2 の評価が従う．

命題 1 u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする．l, μ は正の整数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとし, (43), (44) が成り立つと仮定する．このとき

$$E_l^{1/2}(u(t)) \leqq E_l^{1/2}(u(0))\langle t\rangle^{C\varepsilon}. \tag{50}$$

証明. (28) と補題 6 により

$$\begin{aligned} E_l^{1/2}(u(t)) &\leqq E_l^{1/2}(u(0)) + C\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{a+|b|\leqq l-1\\ a\leqq 1}}\int_0^t \|\Box_i S^a Z^b u^i(\tau)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\\ &\leqq E_l^{1/2}(u(0)) + C\int_0^t \langle\tau\rangle^{-1}E_\mu^{1/2}(u(\tau))E_l^{1/2}(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\\ &\leqq E_l^{1/2}(u(0)) + C\varepsilon\int_0^t \langle\tau\rangle^{-1}E_l^{1/2}(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}\tag{51}$$

であるから Gronwall の補題により

$$E_l^{1/2}(u(t)) \leqq E_l^{1/2}(u(0))\exp\left(C\varepsilon\int_0^t\langle\tau\rangle^{-1}\,\mathrm{d}\tau\right). \tag{52}$$

こうして (50) が得られる．　□

補題 7 u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする．l, μ は正の整数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとし, (43), (44) が成り立つと仮定する．このとき $a \leqq 1$, $a + |b| \leqq \mu - 1$ とすると,

$$\int_0^t \mathcal{E}_\mu(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \leqq C\varepsilon^2\{\log(2+t)\}^3. \tag{53}$$

証明. $a \leqq 1,\ a+|b| \leqq \mu - 1$ のとき (29) と補題 6 により

$$
\begin{aligned}
&\{\log(2+t)\}^{-1/2}\left(\int_0^t \mathcal{E}_\mu(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \\
\leqq\ & CE_\mu^{1/2}(u(0)) + C\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{a+|b|\leqq\mu-1 \\ a\leqq 1}} \int_0^t \|\Box_i S^a Z^b u^i(\tau)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau \\
\leqq\ & C\varepsilon + C\int_0^t \langle\tau\rangle^{-1} E_\mu(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
\leqq\ & C\varepsilon + C\varepsilon^2 \int_0^t \langle\tau\rangle^{-1}\,\mathrm{d}\tau \\
\leqq\ & C\varepsilon + C\varepsilon^2 \log(2+t)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

となるので (53) が得られる. □

5 低階エネルギーの評価.

本節では低階エネルギーの評価 (12) を示す. ここまでの評価では 3 次元も 4 次元以上も共通に扱ってきた. この節では 3 次元の場合に (8) の形を利用する必要が出てくるが, 必要になるのは $r > c_0 t$ $(c_0 := \frac{1}{2}\min_{1\leqq i\leqq m} c_i)$ においてである. $r < c_0 t$ の場合は 3 次元も 4 次元以上も共通に扱える. 問題は前節のように系 1 の評価を使うと $\langle t\rangle^{-1}$ の減衰しか得られず, t について積分しても有界にならないことである. ここで補題 7 の時空 L^2-評価が役に立つことになる. 低階エネルギー $E_\mu(u(t))$ を評価するには補題 3

$$
E_\mu^{1/2}(u(t)) \leqq E_\mu^{1/2}(u(0)) + C\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{a+|b|\leqq\mu-1 \\ a\leqq 1}} \int_0^t \|\Box_i S^a Z^b u^i(\tau)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau \tag{55}
$$

を用いる. 以下 (55) の右辺の積分について順を追って見て行こう.

補題 8 u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. $l,\ \mu$ は正の整数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとし, (43), (44) が成り立つと仮定する. このとき $a \leqq 1,\ a+|b| \leqq \mu - 1$ とすると,

$$
\int_0^t \|\Box_i S^a Z^b u^i(\tau)\|_{L^2(r<c_0\tau)}\,\mathrm{d}\tau \leqq CE_l^{1/2}(u(0))\varepsilon. \tag{56}
$$

証明. (18) により,

$$
\|\Box_i S^a Z^b u^i(t)\|_{L^2(r<c_0 T)} \leqq C\sum_{j,k=1}^m \sum_{c,d,e,f} \|\partial S^c Z^d u^j(t)\partial S^e Z^f u^k(t)\|_{L^2(r<c_0 T)} \tag{57}
$$

である．ここで c, d, e, f についての和は $c+|d|+e+|f| \leqq \mu-1$, $c+e \leqq 1$, $c+|d| \leqq e+|f|$ にわたってとる．まず右辺の和のうちで $c=0$ の場合は $|d| \leqq [(\mu-1)/2]$ であって，(37) により

$$\begin{aligned}
&\| \partial Z^d u^j(\tau) \partial S^e Z^f u^k(\tau) \|_{L^2(r<c_0\tau)} \\
&\leqq C\langle\tau\rangle^{-1} \| \langle r\rangle^{n/2-1} \langle c_j\tau - r\rangle \partial Z^d u^j(\tau) \langle r\rangle^{-1/2} \partial S^e Z^f u^k(\tau) \|_{L^2(r<c_0\tau)} \\
&\leqq C\langle\tau\rangle^{-1} \| \langle r\rangle^{n/2-1} \langle c_j\tau - r\rangle \partial Z^d u^j(\tau) \|_{L^\infty} \| \langle r\rangle^{-1/2} \partial S^e Z^f u^k(\tau) \|_{L^2} \\
&\leqq C\langle\tau\rangle^{-1} E_\mu^{1/2}(u(\tau)) \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)).
\end{aligned} \tag{58}$$

$c=1$ の場合は $1+|d| \leqq [(\mu-1)/2]$, $|f| \leqq \mu-2$ である．(40) および命題 1 により，

$$\begin{aligned}
&\| \partial S Z^d u^j(\tau) \partial Z^f u^k(\tau) \|_{L^2(r<c_0\tau)} \\
&\leqq C\langle\tau\rangle^{-1} \| \langle r\rangle^{-1/2} \partial S Z^d u^j(\tau) \langle r\rangle^{n/2-1} \langle c_k\tau - r\rangle \partial Z^f u^k(\tau) \|_{L^2(r<c_0\tau)} \\
&\leqq C\langle\tau\rangle^{-1} \| \langle r\rangle^{-1/2} \partial S Z^d u^j(\tau) \|_{L^2} \| \langle r\rangle^{n/2-1} \langle c_k\tau - r\rangle \partial Z^f u^k(\tau) \|_{L^\infty} \\
&\leqq C\langle\tau\rangle^{-1} \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)) E_l^{1/2}(u(\tau))
\end{aligned} \tag{59}$$

よって (57)-(59) により

$$\| \Box_i S^a Z^b u^i(\tau) \|_{L^2(r<c_0\tau)} \leqq C\langle\tau\rangle^{-1} \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)) E_l^{1/2}(u(\tau)). \tag{60}$$

したがって 命題 1 により

$$\int_0^t \| \Box_i S^a Z^b u^i(t) \|_{L^2(r<c_0\tau)} \,\mathrm{d}\tau \leqq C E_l^{1/2}(u(0)) \int_0^t \langle\tau\rangle^{-1+C\varepsilon} \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)) \,\mathrm{d}\tau. \tag{61}$$

ここで $t \leqq 2^{N+1}$ とすると，補題 7 より

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \langle\tau\rangle^{-1+C\varepsilon} \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \\
&\leqq \int_0^1 \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)) \,\mathrm{d}\tau + \sum_{j=0}^N (2^j)^{-1+C\varepsilon} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \mathcal{E}_\mu^{1/2}(u(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \\
&\leqq \left(\int_0^1 \mathcal{E}_\mu(u(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \right)^{1/2} + \sum_{j=0}^N (2^j)^{-1/2+C\varepsilon} \left(\int_0^{2^{j+1}} \mathcal{E}_\mu(u(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \right)^{1/2} \\
&\leqq C\varepsilon + C\varepsilon \sum_{j=0}^N (2^j)^{-1/2+C\varepsilon} \{\log(2+2^j)\}^{3/2} \leqq C\varepsilon.
\end{aligned} \tag{62}$$

よって (56) が示された． □

あとは $r > c_0 t$ における評価が残っている．これは $n=3$ と $n \geqq 4$ とで扱いが異なる．まず $n \geqq 4$ の場合を示そう．

補題 9 $n \geqq 4$ とする．u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする．l, μ は正の整数，$\varepsilon > 0$ は十分小さいとし，(43), (44) が成り立つと仮定する．このとき $a \leqq 1$, $a + |b| \leqq \mu - 1$ とすると，

$$\int_0^t \|\Box_i S^a Z^b u^i(\tau)\|_{L^2(r>c_0\tau)}\, \mathrm{d}\tau \leqq C\varepsilon^2. \tag{63}$$

証明．(18) により，

$$\|\Box_i S^a Z^b u^i(t)\|_{L^2(r>c_0T)} \leqq C \sum_{j,k=1}^{m} \sum_{c,d,e,f} \|\partial S^c Z^d u^j(t) \partial S^e Z^f u^k(t)\|_{L^2(r>c_0T)} \tag{64}$$

である．ここで c, d, e, f についての和は $c+|d|+e+|f| \leqq \mu-1$, $c+e \leqq 1$, $c+|d| \leqq e+|f|$ にわたってとる．$c+|d| \leqq [(\mu-1)/2]$ なので，(38) により

$$\begin{aligned}
&\|\partial S^c Z^d u^j(\tau) \partial S^e Z^f u^k(\tau)\|_{L^2(r>c_0T)} \\
\leqq\ & C\langle\tau\rangle^{-3/2} \|\langle r\rangle^{(n-1)/2} \partial S^c Z^d u^j(\tau) \partial S^e Z^f u^k(\tau)\|_{L^2(r>c_0T)} \\
\leqq\ & C\langle\tau\rangle^{-3/2} \|\langle r\rangle^{(n-1)/2} S^c \partial Z^d u^j(\tau)\|_{L^\infty} \|\partial S^e Z^f u^k(\tau)\|_{L^2} \\
\leqq\ & C\langle\tau\rangle^{-3/2} E_\mu(u(\tau)) \leqq C\varepsilon^2 \langle\tau\rangle^{-3/2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

なので，(64), (65) により (63) が得られる． □

次に $n = 3$ の場合は (8) の形を使う．

補題 10 $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ のとき

$$|Q_{\alpha\beta}(\phi, \psi)(t,x)| \leqq C\langle r\rangle^{-1}\{|\nabla\phi(t,x)||Z\psi(t,x)| + |Z\phi(t,x)||\nabla\psi(t,x)|\} \tag{66}$$

証明．$r \leqq 1$ の場合は明らか．$r \geqq 1$ で例えば $Q_{12}(\phi, \psi)$ を評価するには次の恒等式を使えばよい．

$$\begin{aligned}
x^1 Q_{12}(\phi, \psi) &= \partial_1\phi\Omega_{12}\psi - \Omega_{12}\phi\partial_1\psi \\
x^2 Q_{12}(\phi, \psi) &= \partial_2\phi\Omega_{12}\psi - \Omega_{12}\phi\partial_2\psi \\
x^3 Q_{12}(\phi, \psi) &= \partial_3\phi\Omega_{12}\psi - \Omega_{12}\phi\partial_3\psi \\
&\quad -\partial_1\phi\Omega_{23}\psi + \Omega_{23}\phi\partial_1\psi - \partial_2\phi\Omega_{31}\psi + \Omega_{31}\phi\partial_2\psi
\end{aligned}$$

□

補題 11 $n = 3$ とする．u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする．l, μ は正の整数，$\varepsilon > 0$ は十分小さいとし，(43), (44) が成り立つと仮定する．このとき $a \leqq 1$, $a + |b| \leqq \mu - 1$ とすると，

$$\int_0^t \|\Box_i S^a Z^b u^i(\tau)\|_{L^2(r>c_0T)}\, \mathrm{d}\tau \leqq C\varepsilon E_l^{1/2}(u(0)). \tag{67}$$

証明. 補題 10 と (27) により,

$$\begin{aligned}\|Q_{\alpha\beta}(u^j, u^k)(\tau)\|_{L^2(r>c_0\tau)} &\leqq C\langle\tau\rangle^{-1}\sum_{j,k=1}^{m}\|\nabla u^j(\tau)Zu^k(\tau)\|_{L^2(r>c_0\tau)}\\ &\leqq C\langle\tau\rangle^{-3/2}\sum_{j,k=1}^{m}\|\nabla u^j(\tau)\|_{L^2}\|\langle r\rangle^{1/2}Zu^k(\tau)\|_{L^\infty}\\ &\leqq C\langle\tau\rangle^{-3/2}\bar{E}_1^{1/2}(u(\tau))\bar{E}_2^{1/2}(u(\tau)). \qquad (68)\end{aligned}$$

さらに, (18) と

$$S^aZ^bQ_{\alpha\beta}(u^j, u^k) = \sum_{\substack{c+e=a\\ d+f=b}} Q_{\alpha\beta}(S^cZ^du^j, S^eZ^fu^k) \qquad (69)$$

により

$$\begin{aligned}\|\Box_i S^aZ^bu^i(\tau)\|_{L^2(r>c_0\tau)} &\leqq C\langle\tau\rangle^{-3/2}E_\mu^{1/2}(u(\tau))E_l^{1/2}(u(\tau))\\ &\leqq C\varepsilon\langle\tau\rangle^{-3/2}E_l^{1/2}(u(\tau)). \qquad (70)\end{aligned}$$

よって命題1により (67) が得られる. □

補題 8, 9, 11 により次が示された.

命題 2 u を $0 \leqq t < T$ における (30)-(31) の滑らかな解とする. l, μ は正の整数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとし, (43), (44) が成り立つと仮定する. このとき

$$E_\mu^{1/2}(u(t)) \leqq E_\mu^{1/2}(u(0)) + C\varepsilon^2 + C\varepsilon E_l^{1/2}(u(0)). \qquad (71)$$

最後に定理1の証明を述べよう. $E_l^{1/2}(u(0)) < \varepsilon$ であるから, 少なくとも t が小さいうちは $E_\mu^{1/2}(u(t)) < 2\varepsilon$ である. そのような t の全体は有界であるとし, $T < \infty$ をその上限とする. すると $0 \leqq t < T$ においては命題2により

$$E_\mu^{1/2}(u(t)) \leqq \varepsilon + C\varepsilon^2 \qquad (72)$$

である. したがって ε が十分小さければ $0 \leqq t < T$ において $E_\mu^{1/2}(u(t)) < 3\varepsilon/2$ となるが, これは T のとり方に矛盾する. よって $E_\mu^{1/2}(u(t)) < 2\varepsilon$ を満たしつつどこまでも解を延長できることになる. 以上で定理1は示された.

参考文献.

[1] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267-282.

[2] K. Hidano, *An elementary proof of global or almost global existence for quasi-linear wave equations*, preprint.

[3] K. Hidano, *The global existence theorem for quasi-linear wave equations with multiple speeds*, preprint.

[4] K. Hidano, K. Yokoyama, *A remark on the almost global existence theorems of Keel, Smith and Sogge*, preprint.

[5] K. Hidano, K. Yokoyama, *A new proof of the global existence theorem of Klainerman*, preprint.

[6] S. Katayama, *Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, preprint.

[7] S. Katayama, *Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, preprint.

[8] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, preprint.

[9] M. Keel, F. Smith, C. D. Sogge, *Almost global existence for some semilinear wave equations*, J. Anal. Math. **87** (2002), 265-279.

[10] M. Keel, F. Smith, C. D. Sogge, *Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions*, preprint, arXiv:math.AP/0110321.

[11] S. Klainerman, *Uniform decay estimate and the Lorentz invariance of the classical wave equations*, Comm. Pure Appl. Math **38** (1985), 321-332.

[12] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Applied Mathematics **23** (1986), 293-326.

[13] S. Klainerman and T. C. Sideris, *On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 307-321.

[14] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japan. J. Math. **27** (2001), 113-202.

[15] J. Metcalfe, *Global existence for semilinear wave equations exterior to nontrapping obstacles*, preprint, arXiv:math.AP/0210246.

[16] Y. Shibata and Y. Tsutsumi, *On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain*, Math. Z. **191** (1986), 165-199.

[17] T. C. Sideris and S.-Y. Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with Multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 477-488.

[18] C. D. Sogge, *Global existence for nonlinear wave equations with multiple speeds*, preprint.

[19] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609-632.